

# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ LOGIKE RJEŠENJA

3. ožujka 2011.

## BODOVI:

- **POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE:**
  - ZADACI 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10: **3 BODA**
  - ZADATAK 8: **2 BODA**
- **IZOSTANAK RJEŠENJA:**
  - SVI ZADACI: **1 BOD**
- **POGREŠNO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA**

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAX BODOVA
1.	×	39
2.	×	30
3.	×	45
4.	×	27
5.	×	12
6.	×	36
7.	×	15
8.	×	48
9.	×	27
10.	×	9
<b>UKUPNO</b>		<b>288</b>

**Zadatak 1. (bodovi:  $13 \times 3 = 39$ )**

Koristeći se samo osnovnim pravilima, dopunite sljedeći dokaz iskazima i, desno, potpunim opravdanjima! U opravdanjima upotrijebite ‘pretp.’ za ‘pretpostavka’, ‘u’ za ‘uvodenje’, ‘i’ za ‘isključenje’, ‘op’ za ‘opetovanje’ i poveznike  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  (npr. ‘u $\wedge$ ’ za ‘uvodenje konjunkcije’)!

1	$\neg(A \vee \neg A)$	pretp.
2	$A$	pretp.
3	$A \vee \neg A$	2/ u $\vee$
4	$\neg(A \vee \neg A)$	1/ op.
5	$\neg A$	2-4/ u $\neg$
6	$A \vee \neg A$	5/ u $\vee$
7	$\neg(A \vee \neg A)$	1/ op.
8	$A \vee \neg A$	1-7/ i $\neg$

Alternativa:

1	$\neg(A \vee \neg A)$	pretp.
2	$\neg A$	pretp.
3	$A \vee \neg A$	2/ u $\vee$
4	$\neg(A \vee \neg A)$	1/ op.
5	$A$	2-4/ i $\neg$
6	$A \vee \neg A$	5/ u $\vee$
7	$\neg(A \vee \neg A)$	1/ op.
8	$A \vee \neg A$	1-7/ i $\neg$

**Zadatak 2. (bodovi:  $10 \times 3 = 30$ )**

Odgovorite s DA ili NE na sljedeća pitanja:

1. Pojmovi 'otac' i 'majka' međusobno su ukršteni? NE
2. Pojmovi 'sestra' i 'strina' međusobno su ukršteni? DA
3. Pojmovi 'satnik' i 'general' međusobno su ukršteni? NE
4. Pojmovi 'satnik' i 'general' međusobno su razdvojeni? DA
5. Pojam 'metal' nadređen pojmu 'legura'? DA
6. Pojmovi 'infracrven' i 'ultraljubicast' međusobno su kontradiktorni?  
NE
7. Pojam 'zlato' nadređen pojmu 'metal'? NE
8. Pojmovi 'bos' i 'obuven' međusobno lišidbeni? DA
9. Pojmovi 'bijel' i 'crn' međusobno suprotni? DA
10. Pojam 'led' podređen pojmu ' $H_2O$ '? DA

**Zadatak 3. (bodovi:  $16 \times 3 = 48$ )**

Nadopunite istinitosno stablo (iskazima s kvačicom ili bez nje, brojkama, križićima ili kružićima) i sljedeći iskaz, te odgovorite je li taj iskaz valjan.

$$\boxed{(R \rightarrow \neg S) \leftrightarrow (S \rightarrow \neg R)}$$

**Priznaje se samo cijeli redak u stablu, zajedno s opravdanjem.**

1	$\neg[(R \rightarrow \neg S) \leftrightarrow (S \rightarrow \neg R)]\checkmark$		
	$\wedge$		
2	$R \rightarrow \neg S\checkmark$	$\neg(R \rightarrow \neg S)\checkmark$	1
3	$\neg(S \rightarrow \neg R)\checkmark$	$S \rightarrow \neg R\checkmark$	1
4	$S$		3
5	$\neg\neg R\checkmark$		3
6	$R$		5
	$\wedge \quad \backslash$		
7	$\neg R$		2
	$\times \quad \times$		
8		$R$	2
9		$\neg\neg S\checkmark$	2
10		$S$	2
		$\wedge \quad \backslash$	
11		$\neg S$	3
		$\times \quad \times$	

Iskaz je valjan.

(Tekstualni se odgovor priznaje ako i samo ako je prvi dio zadatka točno riješen.)

**Zadatak 4.** (bodovi:  $9 \times 3 = 27$ )

Zadan je sljedeći iskaz:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

Dopunite na prazne crte donje iskaze na najkraći mogući način tako da dobijete iskaze koji su ekvivalenti zadanoga iskaza! Pripazite da konjunkcija i disjunkcija uvijek budu dvočlane!

1.  $\neg P \vee (Q \rightarrow R)$
2.  $\neg P \vee (\neg Q \vee R)$
3.  $P \rightarrow (\neg Q \vee R)$
4.  $\neg P \vee \neg(Q \wedge \neg R)$
5.  $\neg(P \wedge (Q \wedge \neg R))$
6.  $(\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee R)$
7.  $\neg(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee R)$
8.  $\neg(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge \neg R)$
9.  $\neg((P \wedge Q) \wedge (P \wedge \neg R))$

**Zadatak 5. (bodovi:  $4 \times 3 = 12$ )**

Neka je  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  skup prirodnih brojeva. Za svaki  $m \in \mathbb{N}$  (svaki  $m$  koji je član  $\mathbb{N}$ ) vrijedi da je oblika  $2n$  (nazivamo ga parnim brojem) ili  $2n + 1$  (nazivamo ga neparnim brojem), pri čemu  $n \in \mathbb{N}$ . Ako uzmemo proizvoljan  $k \in \mathbb{N}$ , onda broj  $k$  ne može biti oblika  $2n$  i u isto vrijeme oblika  $2n + 1$  za neki fiksni faktor  $n$ , znači da  $k$  ili nije paran (oblika  $2n$ ), ili nije neparan (oblika  $2n + 1$ ). Slijedi da  $k$  nije prirodan broj.

a) Zaokruži sve što vrijedi za zadani zaključak:

- Dobro je primjenjen *modus ponens*.
- Zaključak je neodlučljiv.
- Dobro je primjenjen *modus tollens*.
- Zaključak nije valjan.
- Zaključak je valjan.
- Ništa od navedenog.

b) Zadani zaključak ima (zaokruži točan odgovor):

- Dvije neistovrijedne premise
- Tri neistovrijedne premise
- Četri neistovrijedne premise
- Pet neistovrijedne premisa

c) Promijenimo dio zaključka:

(...), znači da  $k$  nije paran (oblika  $2n$ ), ni neparan (oblika  $2n + 1$ ). Slijed da (zaokruži točan odgovor):

- ne slijedi ništa.
- $k$  je prirodan broj.
- $k$  nije član skupa  $\mathbb{N}$
- $k$  je paran i neparan

d) Koji je od sljedećih sudova sadržan u izvornom tekstu, gdje ' $m \in \mathbb{N}$ ' znači ' $m$  je član skupa  $\mathbb{N}$ ', ' $m \notin \mathbb{N}$ ' znači ' $m$  nije član skupa  $\mathbb{N}$ ', a ' $Pm$ ' znači ' $m$  je paran broj' (zaokruži točan odgovor)?

- $m \in \mathbb{N} \wedge \neg(Pm \rightarrow Pm)$
- $m \notin \mathbb{N} \wedge \neg\neg(Pm \rightarrow Pm)$
- $m \notin \mathbb{N} \vee \neg\neg(Pm \rightarrow Pm)$
- $m \in \mathbb{N} \wedge \neg(Pm \vee Pm)$

**Zadatak 6. (bodovi:  $12 \times 3 = 36$ )**

Koristeći se samo osnovnim pravilima, dopunite sljedeći dokaz iskazima i, desno, potpunim opravdanjima! U opravdanjima upotrijebite ‘pretp.’ za ‘pretpostavka’, ‘u’ za ‘uvodenje’, ‘i’ za ‘isključenje’, ‘op’ za ‘opetovanje’ i poveznike  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  (npr. ‘ $u\wedge$ ’ za ‘uvodenje konjunkcije’)!

1	$\neg P \vee Q$	pretp.
2	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <math>P</math> </div>	pretp.
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;"> <math>\neg P</math> </div>	pretp.
4	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <math>\neg Q</math> </div> </div>	pretp.
5	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <math>P</math> </div> </div>	2. / op.
6	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <math>\neg P</math> </div> </div>	3. / op.
7	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <math>Q</math> </div>	4-6/ $i\neg$
8	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;"> <math>Q</math> </div>	pretp.
9	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <math>Q</math> </div>	8/ op.
10	$Q$	1, 3-7, 8-9/ $i\vee$
11	$P \rightarrow Q$	2-10/ $u\rightarrow$



**Zadatak 7. (bodovi:  $4 \times 3 = 12$ )**

Za sve iskaze  $P$  i  $Q$ , definiramo novi logički poveznik ‘|’ na sljedeći način:

$$P|Q =_{def} \neg P \vee \neg Q$$

Koristeći samo simbole  $|, A, B, (, )$  zapišite sljedeće iskaze:

1.  $\neg A \equiv A|A$

2.  $A \vee A \equiv (A|A)|(A|A)$

3.  $A \wedge A \equiv (A|A)|(A|A)$

4.  $A \rightarrow B \equiv A|(B|B)$

5.  $A \wedge \neg(B \rightarrow A) \equiv$

$$(((A|(A|A))|(A|(A|A)))|B)|(((A|(A|A))|(A|(A|A)))|B)$$

ili

$$(A|((B|(A|A))|(B|(A|A))))|(A|((B|(A|A))|(B|(A|A))))$$

**Napomena: Svaki zapisani iskaz nužno mora sadržavati simbol ‘|’!**

**Zadatak 8. (bodovi:  $24 \times 2 = 48$ )**

**1.**

Ništa lijepo nije odbojno.  
Neke umjetnine su odbojne.

????

**2.**

Ništa lijepo nije odbojno.  
Neke umjetnine nisu odbojne.

????

Dolje navedeni iskazi su prijedlozi za konkluziju gornjih zaključaka. Upišite **DA** uz one iskaze koji bi zaključak učinili valjanim, u protivnom upišite **NE!**

**Zaključci ne trebaju biti shvaćeni isključivo kao kategorički silogizmi.**

/	Konkluzija	1.	2.
1.	Nešto lijepo nisu umjetnine.	<i>NE</i>	<i>NE</i>
2.	Neke umjetnine su lijepe.	<i>NE</i>	<i>NE</i>
3.	Neke umjetnine su odbojne.	<i>DA</i>	<i>NE</i>
4.	Nešto odbojno jesu umjetnine.	<i>DA</i>	<i>NE</i>
5.	Neke umjetnine nisu odbojne.	<i>NE</i>	<i>DA</i>
6.	Nešto odbojno nisu umjetnine.	<i>NE</i>	<i>NE</i>
7.	Ništa odbojno nije lijepo.	<i>DA</i>	<i>DA</i>
8.	Sve je ne-lijepo ili ništa nije odbojno.	<i>NE</i>	<i>NE</i>
9.	Neke umjetnine su odbojne ili sve umjetnine su odbojne.	<i>DA</i>	<i>NE</i>
10.	Nešto ne-odbojno su umjetnine.	<i>NE</i>	<i>DA</i>
11.	Nešto lijepo je odbojno samo ako su sve umjetnine odbojne a neke i lijepe.	<i>DA</i>	<i>DA</i>
12.	Ako nešto odbojno nije ne-lijepo, onda neke umjetnine nisu umjetnine.	<i>DA</i>	<i>DA</i>

**Zadatak 9. (bodovi:  $9 \times 3 = 27$ )**

Reducirajte skup iskaza  $\Gamma = \{\neg P \rightarrow \neg Q, (Q \rightarrow R) \rightarrow (C \vee A), \neg(Q \rightarrow R), A \wedge \neg P, ((Q \rightarrow P) \leftrightarrow \neg R) \wedge (A \vee P)\}$  na minimalni skup  $\Delta$  ( $\Delta \subseteq \Gamma$ ) iz kojeg slijedi zadani iskaz ili napišite 'NE' ako iz  $\Gamma$  ne slijedi taj iskaz. Za neki skup  $\Delta$  kažemo da je minimalan skup iz kojeg slijedi neki iskaz  $P$  ako i samo ako su potrebni svi članovi skupa  $\Delta$  da bi iskaz  $P$  slijedio iz  $\Delta$ .

1.  $R$
2.  $P \rightarrow Q$
3.  $Q \rightarrow P$
4.  $P$
5.  $A \leftrightarrow \neg Q$
6.  $A \wedge \neg A$
7.  $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$
8.  $((A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow A$
9.  $(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \wedge (B \rightarrow B)$

Rješenja:

1.  $\Delta = \{\neg P \rightarrow \neg Q, \neg(Q \rightarrow R), A \wedge \neg P\}$  ili  $\{\neg(Q \rightarrow R), A \wedge \neg P, ((Q \rightarrow P) \leftrightarrow \neg R) \wedge (A \vee P)\}$
2.  $\Delta = \{\neg(Q \rightarrow R)\}$  ili  $\{A \wedge \neg P\}$
3.  $\Delta = \{\neg P \rightarrow \neg Q\}$
4.  $\Delta = \{\neg P \rightarrow \neg Q, \neg(Q \rightarrow R)\}$
5.  $\Delta = \{\neg P \rightarrow \neg Q, A \wedge \neg P\}$
6.  $\Delta = \{\neg P \rightarrow \neg Q, \neg(Q \rightarrow R), A \wedge \neg P\}$  ili  $\{\neg(Q \rightarrow R), A \wedge \neg P, ((Q \rightarrow P) \leftrightarrow \neg R) \wedge (A \vee P)\}$
7.  $\Delta = \emptyset$
8.  $\Delta = \{A \wedge \neg P\}$
9.  $\Delta = \emptyset$

**Zadatak 10. (bodovi:  $3 \times 3 = 9$ )**

Neka ' $x^\dagger$ ' znači 'sljedbenik od  $x$ '. Uz pomoć te funkcije sljedbenika, operaciju zbrajanja na prirodnim brojevima rekurzivno definiramo kao:

1.  $x + 0 =_{def} x$
2.  $x + y^\dagger =_{def} (x + y)^\dagger$

Koristeći samo simbole  $x, y, +, \cdot, =_{def}, 0, (, ), \dagger$  rekurzivno definirajte sljedeće slučaje množenja nad prirodnim brojevima.

1.  $x \cdot 0 =_{def} 0$
2.  $x \cdot 0^\dagger =_{def} x$
3.  $x \cdot y^\dagger =_{def} (x \cdot y) + x$

**Napomena:** Uočite svojstvo rekurzivne definicije: Prvo u (1.) definiramo početni slučaj, a u (2.) definiramo svaki sljedeći, ali jedan po jedan. Posebno uočite da smo u slučaju (2.) definirali zbroj nekog broja  $x$  i sljedbenika nekog broja  $y$  kao sljedbenik zbroja  $x + y$ .